

Clase 16 - El transistor bipolar de juntura (III)

MODELO DE PEQUEÑA SEÑAL

Contenido:

1. Modelo de pequeña señal
2. Validez del modelo de pequeña señal?
3. Parámetros del modelo de pequeña señal para bajas frecuencias
4. Parámetros del modelo de pequeña señal para altas frecuencias
5. Modelo circuital equivalente de pequeña señal

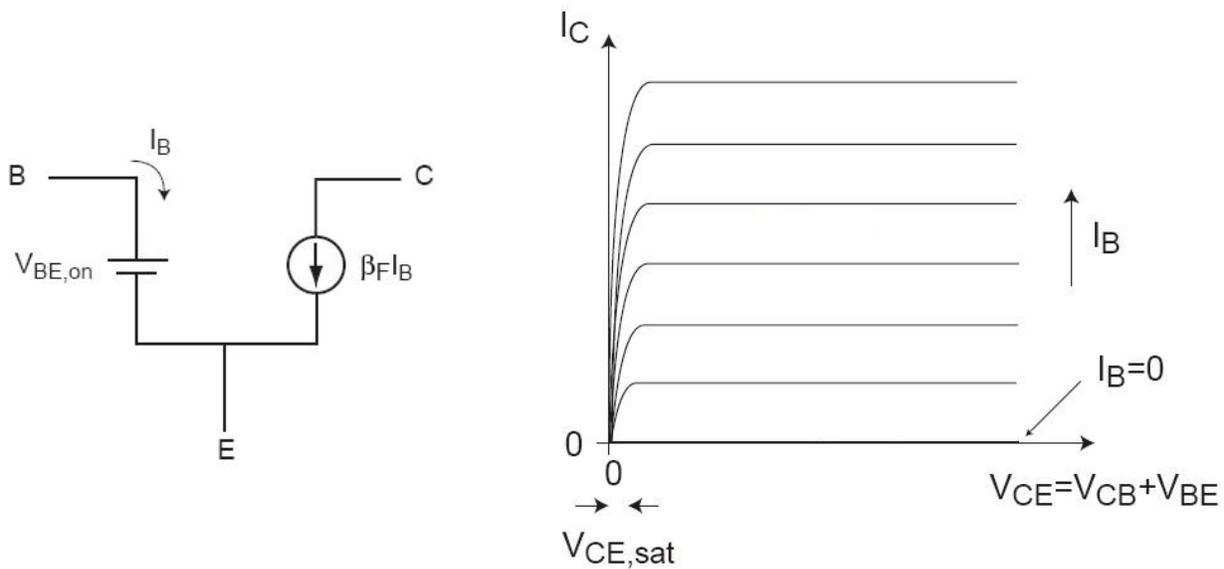
Lecturas recomendadas:

- Müller, Kamins, “Device Electronics for Integrated Circuits”, Ch. 7, §§7.1; 7.5.
- Pedro Julian, “Introducción a la Microelectronica”, Ch. 6, §§6.4.
- Howe, Sodini, “Microelectronics: An Integrated Approach”, Ch. 7, §§7.3–7.4.
- Gray, Hurst, Lewis, Meyer, “Analysis and Design of Analog Integrated Circuits”, Ch. 1, §§1.3.

1. Introducción: Necesidad de un modelo de pequeña señal

□ Repaso: EL TBJ EN M.A.D.

$(V_{BE} \simeq V_{BE(on)} = 0.7\text{ V} > 0; V_{CE} > V_{CE(sat)})$



$$I_C = I_S \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

$$I_B = \frac{I_S}{\beta} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

$$I_C = \beta I_B$$

Tensiones dependientes del tiempo

El TBJ es un dispositivo alineal. ¿Qué significa esto?

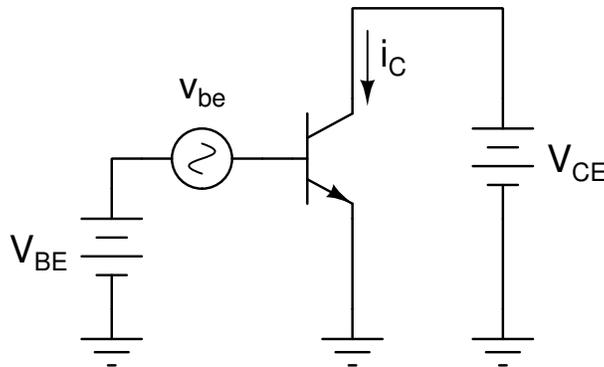
$$i_C = I_S \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_{TH}}\right) \begin{cases} i_{C1} = I_S \exp\left(\frac{v_{BE1}}{V_{TH}}\right) \\ i_{C2} = I_S \exp\left(\frac{v_{BE2}}{V_{TH}}\right) \end{cases}$$

Si tengo dos excitaciones independientes, la respuesta de ambas excitaciones simultáneas **no** es igual a la respuesta de cada excitación de manera independiente.

$$\Rightarrow i_C = I_S \exp\left(\frac{v_{BE1} + v_{BE2}}{V_{TH}}\right) \neq i_{C1} + i_{C2}$$

No se cumple el principio de superposición.

Si además una de estas excitaciones es una tensión dependiente del tiempo, y su dependencia temporal puede ser arbitraria, tendremos una situación como la que se presenta a continuación:



$$i_C = I_S \exp \left(\frac{V_{BE} + v_{be} \sin(\omega t + \phi)}{V_{TH}} \right)$$

Esta situación es *irresoluble* de manera analítica (en lápiz y papel).

¿Cómo lo simplificamos? Nuevamente como en el diodo, el MOSFET y el JFET, aplicando el modelo de pequeña señal.

Modelo de pequeña señal

□ EL TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f(x)$ n -derivable en x_0 :

$$f(E\{x_0\}) \simeq \sum_{i=0}^{(n)} \frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^i$$

Y tomando solamente el polinomio de primer orden ($n = 1$):

$$f(E\{x_0\}) \simeq f(x_0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

¿Cómo se aplica a nuestro problema?

□ LINEALIZACIÓN

Desarrollamos $i_C(v_{BE})$ en serie de Taylor:

$$i_C(V_{BE} + v_{be}) \simeq i_C(V_{BE}) + \left. \frac{\partial i_C(v_{BE})}{\partial v_{BE}} \right|_Q \cdot (v_{BE} - V_{BE})$$

Evaluando para M.A.D.

$$i_C(V_{BE}) = I_S \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial i_C(v_{BE})}{\partial v_{BE}}\right|_Q = \frac{I_S}{V_{TH}} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

$$v_{BE} - V_{BE} = v_{be}$$

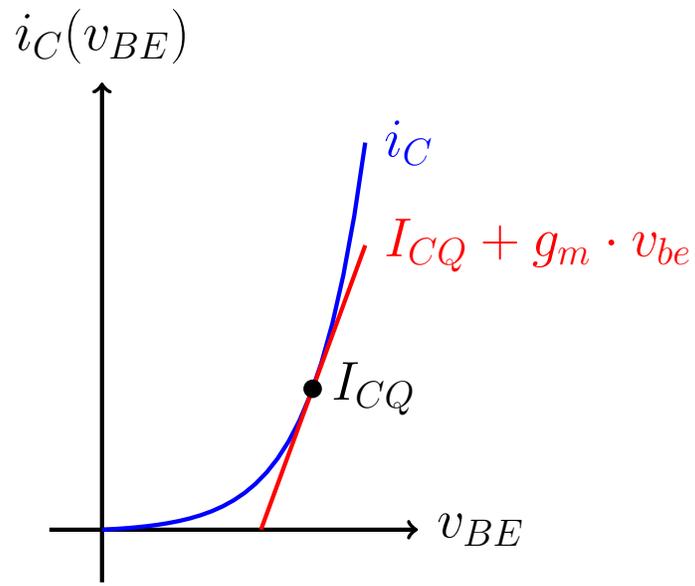
El modelo linealizado resulta:

$$i_C(v_{BE}) \simeq I_S \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right) + \frac{I_S}{V_{TH}} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right) \cdot v_{be}$$

$$i_C(v_{BE}) \simeq I_{CQ} + g_m(V_{BE}) \cdot v_{be}$$

donde definimos la *Transconductancia* del TBJ g_m ($[g_m] = \text{S}$) como:

$$g_m = \left.\frac{\partial i_C(v_{BE})}{\partial v_{BE}}\right|_Q = \frac{I_S}{V_{TH}} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right) = \frac{I_{CQ}}{V_{TH}}$$



La linealización (recta roja) siempre se realiza sobre un punto de trabajo (punto negro), y es válido mientras no se aparte demasiado de la respuesta real (curva azul).

2. Validez del modelo

- ¿Cuánto puede separarse la recta roja de la curva azul?
- ¿Cuán pequeña debe ser la *pequeña señal*?
- ¿Hasta dónde es válido el modelo?

El error que cometemos entre el valor estimado de señal $i_c(t)$ y el valor real $i_C(t) - I_C$ debe ser pequeño.

Aplicaremos el criterio del 10%:

$$(i_C(t) - I_{CQ}) - i_c(t) < 10\% (i_C(t) - I_{CQ})$$

Como esta inecuación no tiene solución \Rightarrow pedimos que el término de segundo orden de Taylor (primer término de error) sea despreciable frente al término lineal:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 i_C}{\partial v_{BE}^2} \Big|_Q \cdot v_{be}^2 < 10\% i_c(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{I_{CQ}}{V_{TH}^2} \cdot v_{be}^2 < 0,1 \left(\frac{I_{CQ}}{V_{TH}} v_{be} \right)$$

$$v_{be} < 0,2 V_{TH}$$

Considerando temperatura ambiente se obtiene:

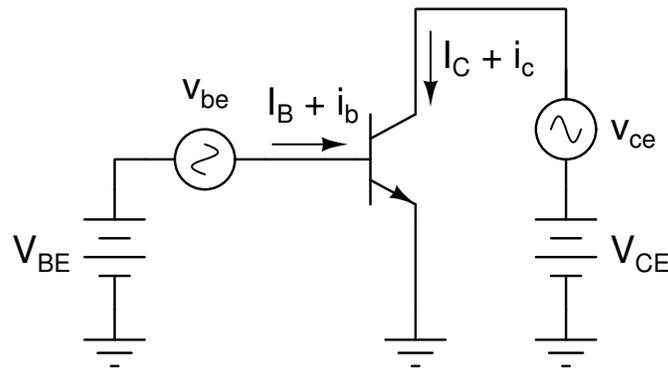
$$v_d \approx 5.2 \text{ mV}$$

En la práctica se tolera:

$$|v_d| < 10 \text{ mV}$$

3. Modelo de pequeña señal del TBJ en bajas frecuencias

Generalizamos la idea de linealización para todas las corrientes y todas las señales aplicadas sobre cualquiera de las fuentes de polarización:



Puntos fundamentales:

- Podemos separar la respuesta del transistor en *polarización* y *pequeña señal*.
- La señal es *pequeña*: La respuesta no lineal puede aproximarse a una respuesta lineal.
- Al poder considerar la respuesta lineal, se puede aplicar una *pseudo-superposición*.
- **¡OJO!** El orden importa. Primero polarización, luego pequeña señal.

Matemáticamente:

$$i_C(V_{BE} + v_{be}, V_{CE} + v_{ce}) \simeq I_C(V_{BE}, V_{CE}) + \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \right|_Q v_{be} + \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \right|_Q v_{ce}$$

$$i_B(V_{BE} + v_{be}, V_{CE} + v_{ce}) \simeq I_B(V_{BE}, V_{CE}) + \left. \frac{\partial i_B}{\partial v_{BE}} \right|_Q v_{be} + \left. \frac{\partial i_B}{\partial v_{BC}} \right|_Q v_{bc}$$

Donde $Q \equiv$ punto de polarización (V_{BE}, V_{CE})

- Corriente i_c de pequeña señal:

$$i_c \simeq g_m v_{be} + g_o v_{ce}$$

- Corriente i_b de pequeña señal:

$$i_b \simeq g_\pi v_{be} + g_\mu v_{bc}$$

Definimos:

$$g_m \equiv \text{transconductancia } [g_m] = \text{S}$$

$$g_o \equiv \text{conductancia de salida o de colector } [g_o] = \text{S}$$

$$g_\pi \equiv \text{conductancia de entrada o de base } [g_\pi] = \text{S}$$

$g_\mu \equiv$ conductancia de realimentación $[g_\mu] = S$

Luego:

$$g_m \simeq \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \right|_Q \quad g_o \simeq \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \right|_Q$$

$$g_\pi \simeq \left. \frac{\partial i_B}{\partial v_{BE}} \right|_Q \quad g_\mu \simeq \left. \frac{\partial i_B}{\partial v_{BC}} \right|_Q$$

□ TRANSCONDUCTANCIA

En M.A.D.

$$i_C = I_S \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

Luego:

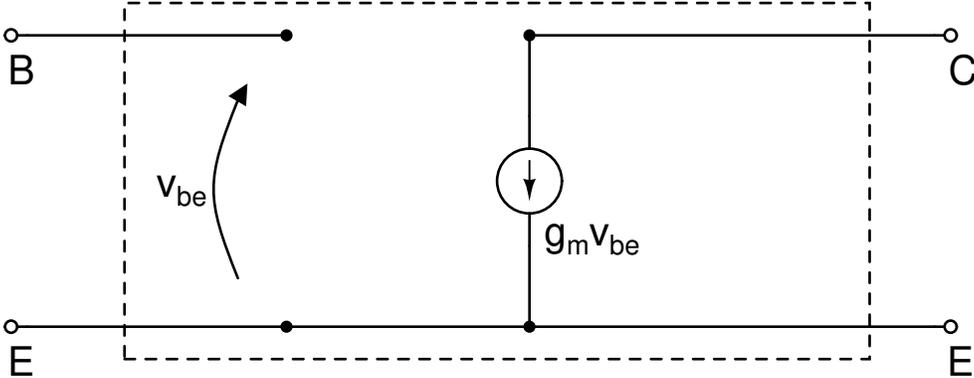
$$g_m = \left. \frac{\partial i_C(v_{BE})}{\partial v_{BE}} \right|_Q = \frac{I_S}{V_{TH}} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

Lo reescribimos en término de I_{CQ} :

$$g_m = \frac{I_{CQ}}{V_{TH}}$$

- Modelo circuital equivalente de g_m :

Lo modelamos como una *fuentes de corriente controlada por tensión*.



□ RESISTENCIA DE ENTRADA

Los cambios en v_{BE} también producen cambios en i_B .

En M.A.D.

$$i_B = \frac{i_C}{\beta}$$

$$i_B = \frac{I_S}{\beta} \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

Luego:

$$g_\pi = \left. \frac{\partial i_B(v_{BE})}{\partial v_{BE}} \right|_Q = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial i_C(v_{BE})}{\partial v_{BE}} \right|_Q = \frac{1}{\beta} \frac{I_S}{V_{TH}} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

Lo reescribimos en término de I_{BQ} :

$$g_\pi = \frac{I_{BQ}}{V_{TH}}$$

o también en término de I_{CQ} :

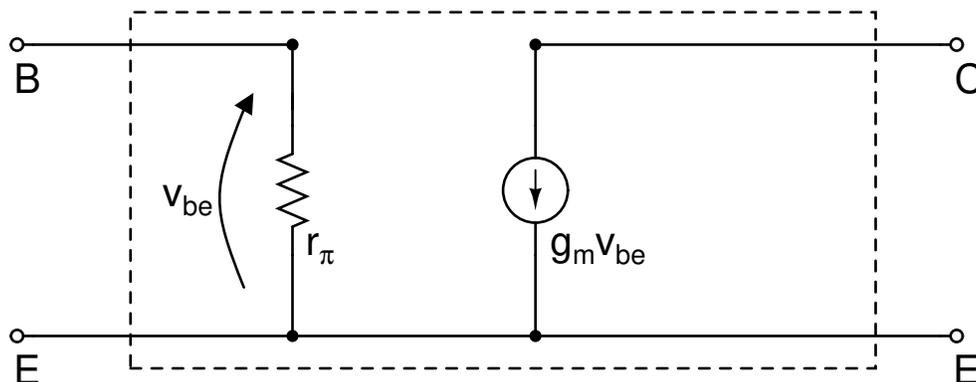
$$g_{\pi} = \frac{1}{\beta} \frac{I_{CQ}}{V_{TH}} = \frac{g_m}{\beta}$$

Es más usual escribirlo en términos de resistencia por lo que

$$r_{\pi} = \frac{1}{g_{\pi}} = \frac{V_{TH}}{I_{BQ}} = \beta \frac{V_{TH}}{I_{CQ}} = \frac{\beta}{g_m}$$

- Modelo circuital equivalente de r_{π} :

Lo modelamos como una *resistencia* (r_{π}) o *conductancia* (g_{π}).



□ GANANCIA DE CORRIENTE

A diferencia del MOSFET y del JFET donde la corriente de *gate* es nula, en el TBJ podemos definir la ganancia de corriente de pequeña señal.

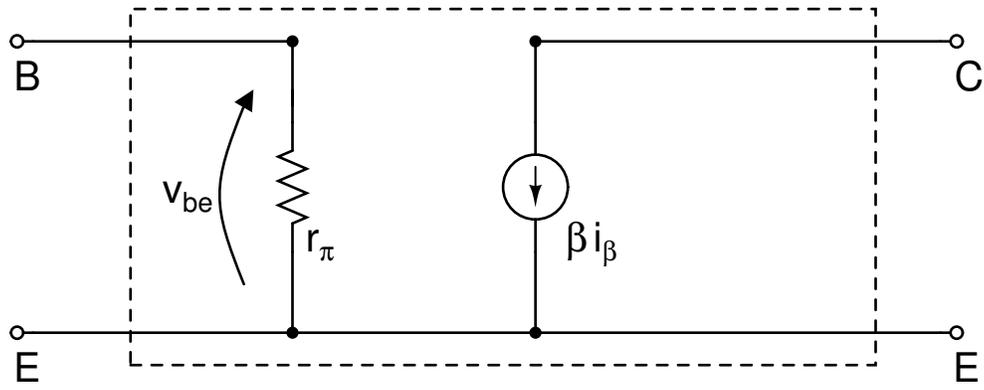
$$\beta_0 = \left. \frac{\partial i_C(i_B)}{\partial i_B} \right|_{i_B=I_{BQ}} \simeq \beta_F$$

β_0 : Ganancia de corriente

Si bien existen casos particulares donde $\beta_0 \neq \beta_F$, en **DISPOSITIVOS SEMICONDUCTORES** consideraremos que siempre se cumple $\beta_0 = \beta_F$.

- Modelo circuital equivalente de β_0 :

Lo modelamos como una *fuentes de corriente controlada por corriente*.

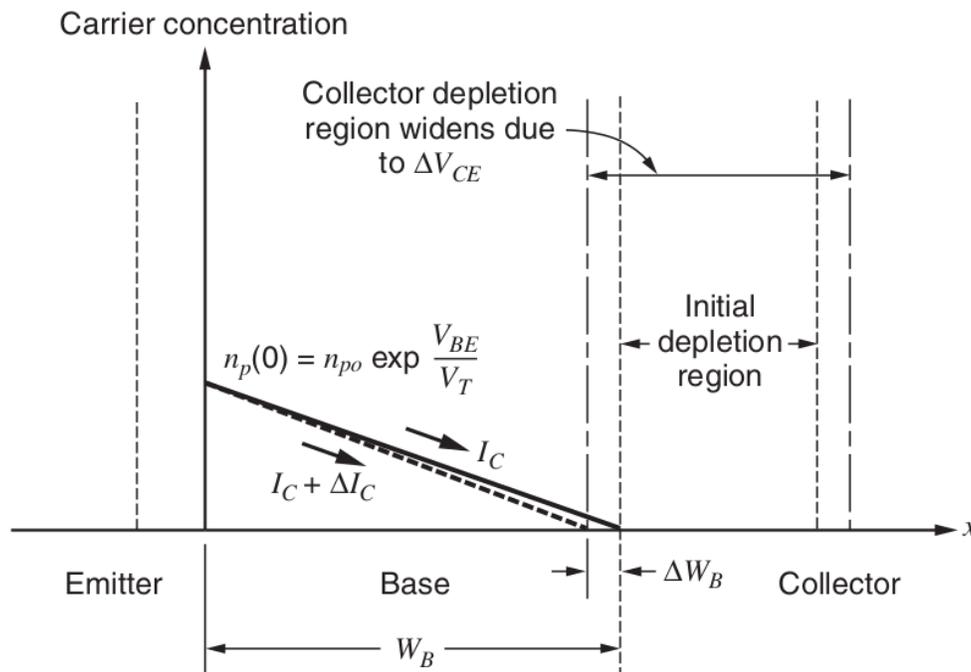


□ RESISTENCIA DE SALIDA

● Efecto Early

En el modelo planteado hasta el momento, en M.A.D. la corriente I_C no debería incrementarse frente a cambios de la tensión V_{CE} ya que la juntura Base–Colector no influye en el perfil de minoritarios en la base, y por lo tanto no altera su flujo de difusión.

Pero la región de vaciamiento de la juntura BC se ve afectada frente a cambios de la tensión V_{CE} agrandando o disminuyendo su ancho.



Si bien no se altera el valor de la densidad de minoritarios en la base, sí se ve afectado el ancho efectivo de la base, que influye en el perfil de minoritarios.

Este fenómeno puede modelizarse considerando:

$$i_C \propto \frac{1}{W_{B(\text{efectivo})}} = \frac{1}{W_B - \Delta W_B} \simeq \frac{1}{W_B} \left(1 + \frac{\Delta W_B}{W_B} \right)$$

Entonces:

$$i_C = \underbrace{\frac{q A_E D_n n_i^2}{W_B N_{aB}} \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_{TH}}\right)}_{i_{C(MAD)}} \left(1 + \frac{\Delta W_B}{W_B} \right)$$

Se puede simplificar la dependencia de W_B con v_{CE} a primer orden:

$$\Delta W_B \propto v_{CE}$$

Luego:

$$i_C = i_{C(MAD)} \left(1 + \frac{\Delta W_B}{W_B} \right) = i_{C(MAD)} \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right)$$

donde V_A se denomina *Tensión de Early*.

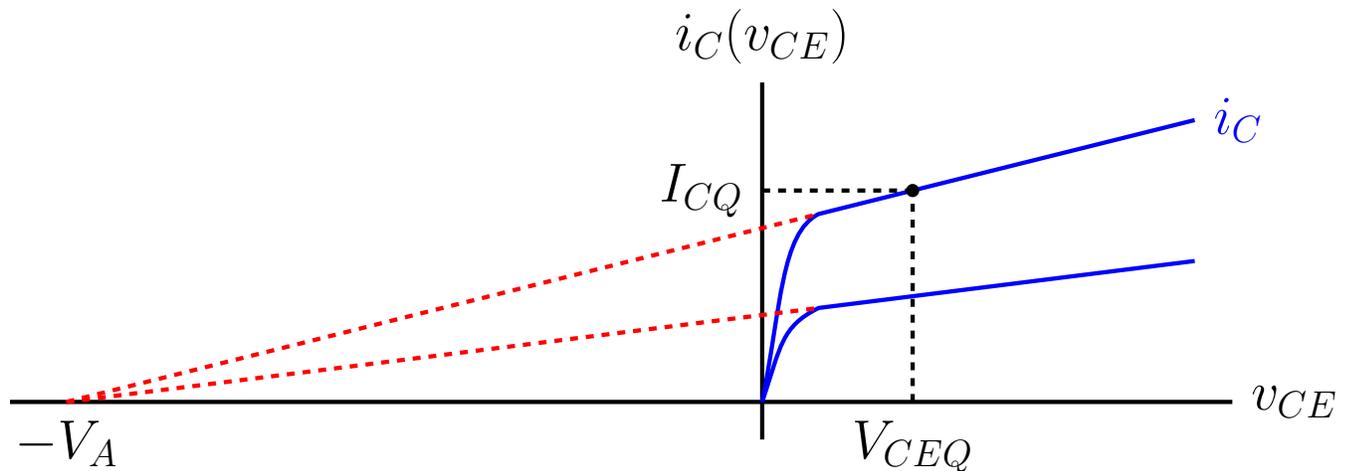
Además en M.A.D.

$$i_{C(MAD)} = \beta i_B$$

Entonces:

$$i_C = i_{C(MAD)} \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right) = \beta i_B \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right)$$

La *tensión de Early* puede observarse en las curvas de salida como el punto del eje de tensiones donde se encuentran las proyecciones de las rectas que modelan a la corriente de colector en M.A.D.



El *Efecto Early* también afecta al dispositivo en otros regímenes, como saturación, ya que siempre que la juntura BC esté polarizada y cambie su tensión de polarización, existirá un cambio en el ancho de la zona de vaciamiento de la juntura que afecta al ancho efectivo de la base.

• Resistencia de salida

Los cambios en v_{CE} también producen cambios en i_C .

En M.A.D.

$$i_C = I_S \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_{TH}}\right) \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A}\right)$$

Luego:

$$g_o = \left. \frac{\partial i_C(v_{CE})}{\partial v_{CE}} \right|_Q = \frac{I_S}{V_A} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_{TH}}\right)$$

Lo reescribimos en término de I_{CQ} :

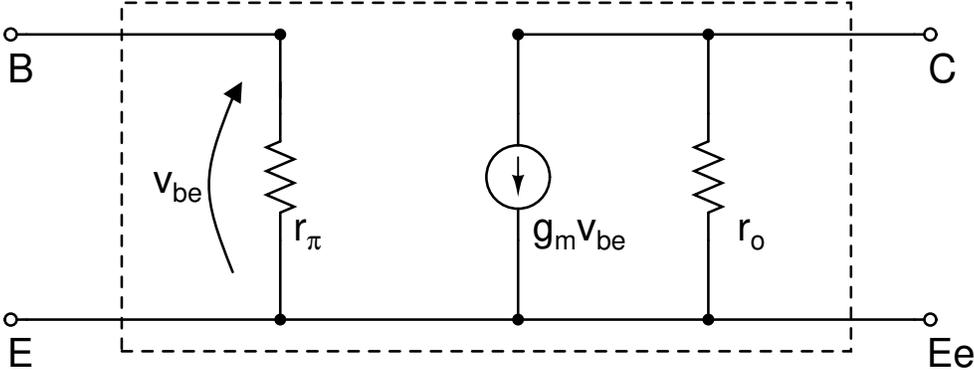
$$g_o = \frac{I_{C(MAD)}}{V_A} \simeq \frac{I_{CQ}}{V_A}$$

Es más usual escribirlo en términos de resistencia por lo que

$$r_o = \frac{1}{g_o} = \frac{V_A}{I_{C(MAD)}} \simeq \frac{V_A}{I_{CQ}}$$

- Modelo circuital equivalente de r_o :

Lo modelamos como una *resistencia* (r_o) o *conductancia* (g_o).



□ RESISTENCIA DE REALIMENTACIÓN

Los cambios en v_{BC} también producen cambios en i_B .

$$I_B = I_{B1} + I_{B2}$$

Donde:

- I_{B1} : corriente debido a la inyección de huecos de la base hacia el emisor.
- I_{B2} : corriente de recombinación de portadores en la base.

Para el cálculo de polarización, I_{B2} se considera despreciable y I_{B1} es predominante.

Los cambios en v_{CE} alteran la extensión de la zona de vaciamiento de la juntura Base–Colector, afectando la distribución de minoritarios en la base.

$$v_{CE} \uparrow \Rightarrow n(\text{base}) \downarrow \Rightarrow R \downarrow \Rightarrow I_{B2} \downarrow$$

Considerando V_{BE} constante:

$$g_{\mu} = \left. \frac{\partial i_B}{\partial v_{CE}} \right|_Q = \left. \frac{\partial (i_{B1} + i_{B2})}{\partial v_{CE}} \right|_Q = \left. \frac{\partial i_{B1}}{\partial v_{CE}} \right|_Q + \left. \frac{\partial i_{B2}}{\partial v_{CE}} \right|_Q$$

Como la variación de la zona de vaciamiento de la juntura BC no afecta a la inyección de huecos en el emisor

$$\left. \frac{\partial i_{B1}}{\partial v_{CE}} \right|_Q = 0$$

Consideramos que toda la corriente i_B está determinada por i_{B2} podemos decir que

$$\frac{\partial i_{B2}}{\partial i_C} = \frac{\partial i_B}{\partial i_C} = \frac{1}{\beta_0}$$

y entonces podemos reescribir

$$g_{\mu} = \left. \frac{\partial i_{B2}}{\partial i_C} \right|_Q \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \right|_Q = \frac{1}{\beta_0} g_o$$

Como $i_{B2} < i_B$ la relación entre g_{μ} y g_o resulta en una cota superior, es decir:

$$g_{\mu} < \frac{1}{\beta_0} g_o$$

O en términos de resistencia, una cota inferior:

$$r_{\mu} = \frac{1}{g_{\mu}} > \beta_0 r_o$$

Por lo tanto, r_{μ} tiene un valor muy elevado y generalmente puede despreciarse.

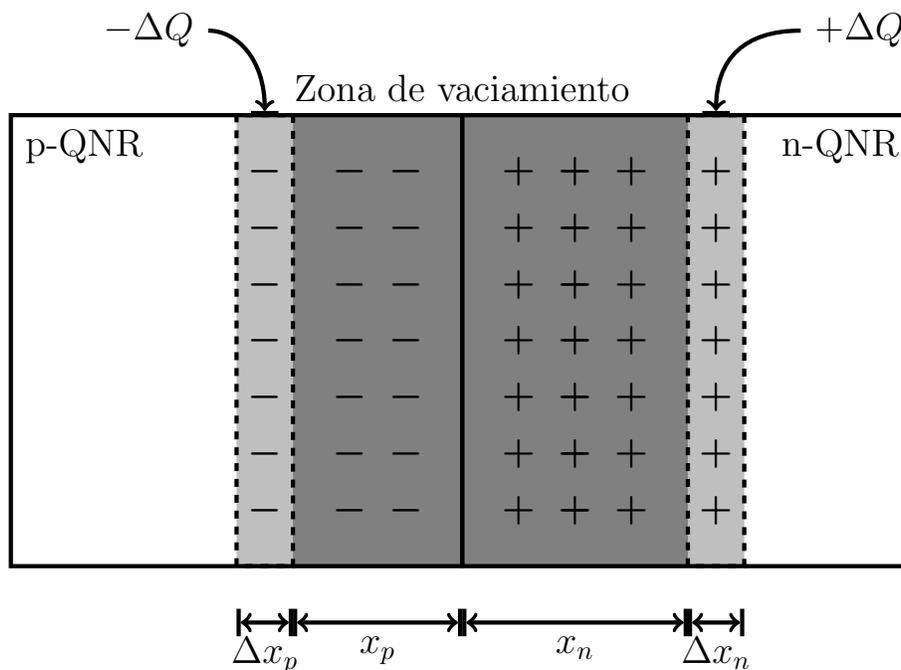
4. Modelo de pequeña señal del TBJ en altas frecuencias

□ REPASO DE CAPACIDADES EN JUNTURA PN

• Capacidad de juntura (C_j)

Representa la variación de la carga en la zona de vaciamiento respecto de variaciones en la tensión de juntura aplicada

$$C_j = \left| \frac{\partial Q_{ZV}}{\partial V_j} \right|$$



La carga en la zona de vacimiento puede expresarse como

$$Q_{ZV} = q N_{d/a} A x_{n/p}$$

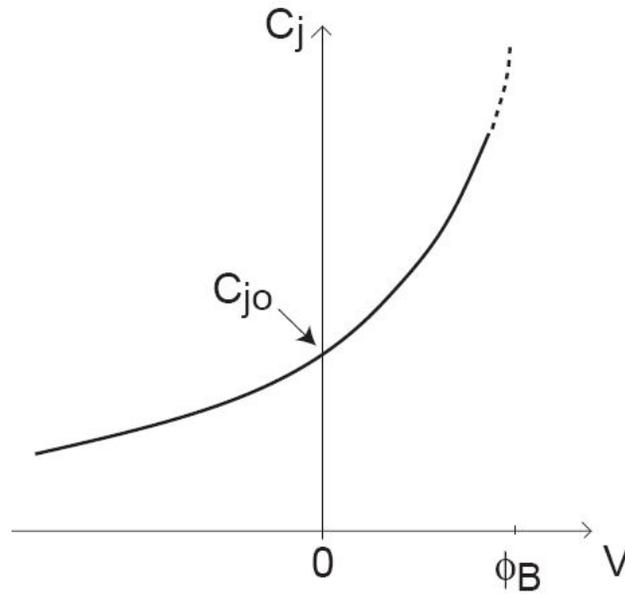
y su variación está dada por la variación del ancho $x_{n/p}$

$$\frac{\partial Q_{ZV}}{\partial V_j} = q N_{d/a} A \frac{\partial x_{n/p}}{\partial V_j}$$

$$\frac{\partial x_{n/p}}{\partial V_j} = \sqrt{\frac{2 \epsilon_S N_{a/d}}{q (N_{a/d} + N_{d/a}) N_{d/a}}} \frac{-1}{2 \sqrt{\phi_B - V_j}}$$

$$\frac{\partial Q_{ZV}}{\partial V_j} = -A \sqrt{\frac{q \epsilon_S N_a N_d}{2 \phi_B (N_a + N_d)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_j}{\phi_B}}}$$

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 - \frac{V_j}{\phi_B}}} \quad C_{j0} = \sqrt{\frac{q \epsilon_S N_a N_d}{2 \phi_B (N_a + N_d)}}$$



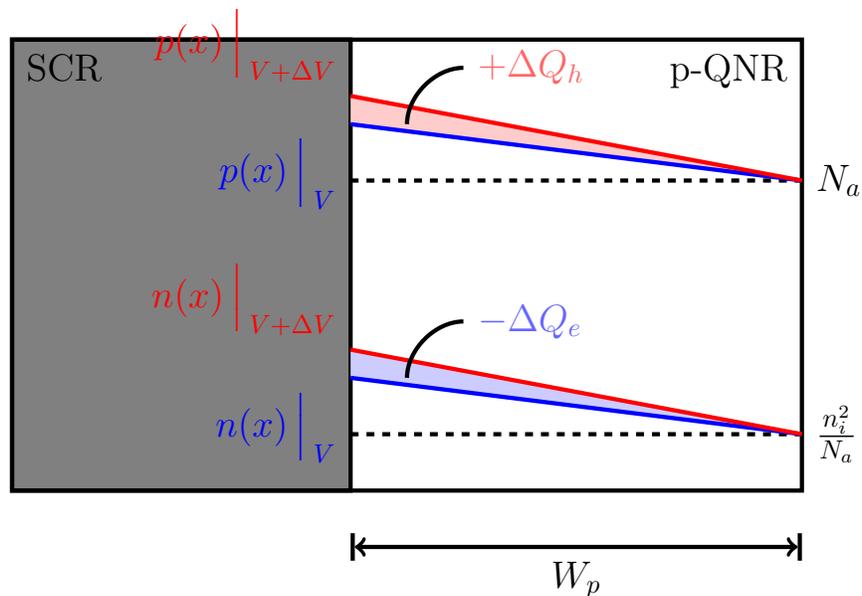
$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 - \frac{V_j}{\phi_B}}}$$

La expresión de C_j diverge, pero existe una saturación para la juntura en directa para $V_j = \frac{\phi_B}{2}$

$$C_{jSat} = \sqrt{2}C_{j0}$$

• Capacidad de difusión (C_d)

Representa la variación de carga en las QNR debido al cambio del perfil de concentración de portadores



Suponemos que $N_d \gg N_a$

$$C_d = C_{dp} = \frac{\partial Q_{ep}}{\partial V_j} = \frac{\partial Q_{hp}}{\partial V_j}$$

$$Q_{ep} = A \frac{1}{2} (n(0) - n(W_p)) W_p$$

Recordando

$$n(0) = \frac{n_i^2}{N_a} \exp\left(\frac{V_j}{V_{th}}\right) \quad n(W_p) = 0$$

$$\Rightarrow C_d = A \frac{1}{2} W_p \frac{1}{V_{th}} \frac{n_i^2}{N_a} \exp\left(\frac{V_j}{V_{th}}\right)$$

Como $J_D = \frac{1}{N_a} \frac{D_e}{W_p} \exp\left(\frac{V_j}{V_{th}}\right)$ Definiendo $\tau_T = \frac{W_p^2}{2 D_e}$

$$\Rightarrow C_d = \frac{1}{V_{th}} \tau_T I_C$$

\square CAPACIDAD BASE-EMISOR (C_π)

En el TBJ se cumple que $N_E \gg N_B$

$$C_\pi = C_{dBE} + C_{jBE}$$

Para el TBJ en M.A.D., la juntura BE se encuentra polarizada en directa, entonces predomina C_d

$$C_\pi \simeq C_{dBE} = \tau_T g_m$$

Definimos:

$$c_\pi \equiv \text{capacidad de entrada } [C_\pi] = \text{F}$$

\square CAPACIDAD BASE-COLECTOR (C_μ)

En el TBJ se cumple que $N_B \gg N_C$

$$C_\mu = C_{dBC} + C_{jBC}$$

Para el TBJ en M.A.D., la juntura BC se encuentra polarizada en inversa, entonces predomina C_j

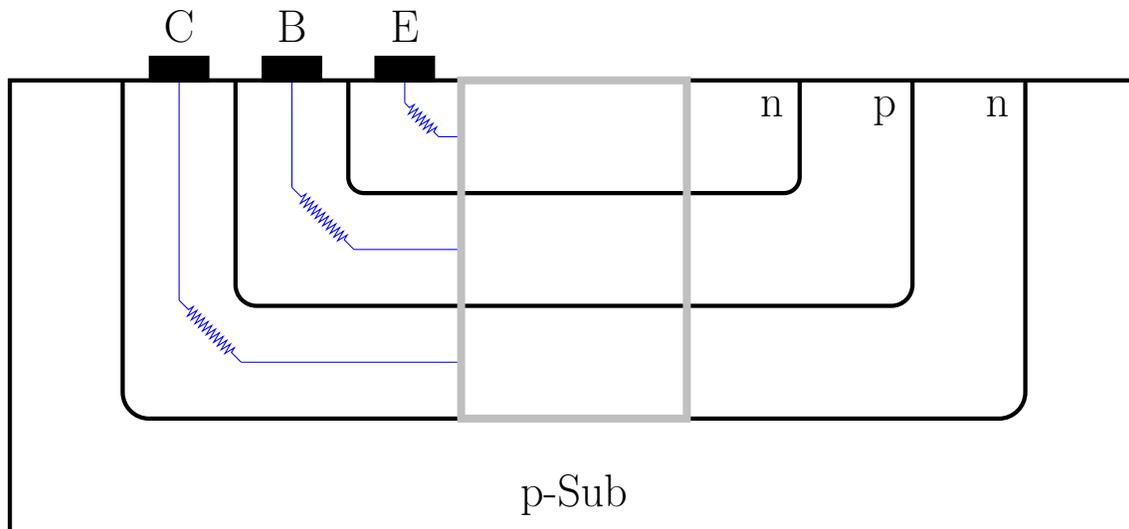
$$C_\mu \simeq C_{jBC} = \frac{C_{jBC0}}{\sqrt{1 + \frac{V_{CB}}{\phi_B}}}$$

Definimos:

$$c_\mu \equiv \text{capacidad de realimentación } [C_\mu] = F$$

□ RESISTENCIAS PARÁSITAS

Los materiales presentan resistividad y por lo tanto aparecen efectos resistivos parásitos.



Son resistencias de muy bajo valor.

Despreciables frente a otras resistencias del modelo y las resistencias externas del circuito.

5. Modelo de pequeña señal completo: Modelo híbrido π

